طبيعة الرياضيات

هذه المقالة ترجمة لـ The Nature of Mathematics من كتاب Scientific American Mathematics (special issue), 1960 في مساق أسس تعليم الرياضيات*.

يعتبر كتاب «الأصول» (300 ق.م.) لإقليدس – أول عمل كلاسيكي في الرياضيات، الذي ألهم مائة جيل من الجهد الرياضي – نصراً ذهنياً وسوء حظ أو محنة لعلم التدريس. صحيح أن العالم استنتج فكرة البرهان الرياضي والتنظيم المنطقي للمعرفة الرياضية، وحصل على معلومات قيمة؛ ولكن الكثير من المفكرين، بمن فيهم الرياضيون، أساءوا فهم معنى عمل إقليدس وحصروا أنفسهم بـ فهمٍ ضيقٍ للرياضيات. فقد استنتجوا أن الرياضيات هي توسيع منطقي فقط؛ تبدأ ببديهيات وتعريفات (تذكر بوضوح من البداية) وتتوصل [أي الرياضيات][1] الى نتائج حول المفاهيم الرياضية التي تعرف في التعريفات.

إن إقليدس – في عمله «العناصر» – لم يشمل أو يبحث ما فعله الرياضيون من قبله. لذا، على الرياضيين وقبل أن يحصلوا على معرفة رياضية تمكنهم من التنظيم الاستنتاجي الذي قدمه إقليدس للهندسة – عليهم أن يمضوا عقودا أو قرونا في خلق/ابتكار (creating) المادة الرياضية. ويختلف العمل الإبداعي (creative work) عن التنظيم المنطقي الذي ينتقل من خطوة إلى أخرى، بناءً على بديهية أو استنتاج سابق. فالعملية الإبداعية تتطلب تخبطاً وتشككاً وحدساً وافتراضات لفهم مفهوم معين، أو استخدام الحدس، أو للوصول الى برهان ما [بمعنى آخر للحصول على معرفة جديدة]؛ هناك مهارات وشروط ضرورية، مثل: التخيل، الحدس، التكهن، الاستبصار، التجريب، الصدفة، الحظ، العمل الجاد [المثابرة]، الصبر والتحمل.

> الخلق الرياضي هو في النهاية – كما وصفه عالم الفيزياء بريدجمان W. P. Bridgman «الفعل الأكثر لعنة للعمل الذهني، حيث لا سلطة للمحظور أو المحرّم». لا يوجد منطق أو طريقة ناجعة (infallible guide) ترشد الذهن كيف يفكر

بالتأكيد يمكن أن يتدخل بعض التفكير العقلي عند اتخاذ قرارات بخصوص الاستمرار في مسار يبدو واعداً [للوصول إلى نتيجة نطمح اليها]، قد تكون القرارات مثل إلغاء تخمين ما؛ أو نقطة البداية، أو تتبع مسار العمل. ولكن الخلق الرياضي هو في النهاية – كما وصفه عالم الفيزياء بريدجمان Bridgman .W .P– «الفعل الأكثر لعنة للعمل الذهني، حيث لا سلطة للمحظور أو المحرّم». لا يوجد منطق أو طريقة ناجعة (infallible guide) ترشد الذهن كيف يفكر. إن حقيقة أن العديد من علماء الرياضيات الكبار قد واجهوا مشكلة ما وفشلوا في حلها؛ ثم جاء آخرون وحلوها، لتظهر أهمية

* المساق بإشراف: د. فطين مسعد / كلية الدراسات العليا – جامعة بير زيت.

1- كل ما بين الأقواس على شاكلة [ ] هي إضافة مني ارتأيت أهميتها.

المحاولات الذهنية الفردية وعلاقتها بالخلق الرياضي، أكثر من الطريقة المنطقية المنظمة التي نقرؤها في البراهين النهائية للمسألة.

الفعل الإبداعي، أو إعادة الإبداع من قبل الطلبة، هو قلب [جوهر] الرياضيات. إنها المساهمة الأبرز التي يقدمها علماء الرياضيات لتجاوز الصعوبات العظمى ودفع الرياضيات الى الأمام. إن العملية/السيرورة الإبداعية أساسية ليس فقط في حل المشكلات. فبدون عملية الخلق أو الإبداع هذه (خلق مساحات واتجاهات وأهداف جديدة للبحث والاكتشاف)، بدون الخلق تستنزف الرياضيات نفسها بإعادة التكرار أو التحجر عند براهين قديمة، وتفقد حياتها. صحيح أن إعادة ترتيب خطوات البرهان أو النظريات بطرق منطقية أو استنتاجية يحتاج الى براعة، ولكنه أولاً انجز منذ زمن بعيد، وثانياً يبدو هذا العمل كترتيب الكتب. بينما يمكننا مقارنة الفعل الابداعي بتأليف الكتب! إن الرضى الذي يمكن أن توفره الرياضيات – كإثارة الصيد، ومتعة الاكتشاف، وطعم الإنجاز، وفرح النجاح – يتحقق في العمل الإبداعي أكثر منه في إعادة ترتيب الخطوات النهائية بطريقة استنتاجية.

ومع أنه يجب تقديم الرياضيات بطريقة استنتاجية كي نتمكن من إنجاز تنظيم مترابط من جهة، وفحص خطوات البرهان من جهة أخرى، مع ذلك تبقى قيمة الترتيب المنطقي متواضعة أكثر مما يمكن تصديقه. خلال قرون عديدة (3000 ق.م.– 1900م) حصل الرياضيون على الأعداد والعمليات التي تشملها الآن الأعداد المركبة، ولاحقاً تم تضمينها في الرياضيات، وعرف الرياضيون بدقة متناهية هذه الأعداد وكيف يجب أن تكون صفاتها. في أواخر القرن الـ 19 (ولأسباب ليس لها علاقة مباشرة هنا) قرر علماء الرياضيات تطوير بناء منطقي للأعداد المركبة. وعليه بحثوا عن بديهيات يمكن من خلالها استنباط صفات (مثبت صحتها أصلاً) لمختلف أنواع الأعداد. وبسبب الرغبة في الحصول على معرفة جديدة حول الأعداد، أو ضمان خواص الأعداد، أصبح التنظيم المنطقي غير ضروري.

وهناك أسباب أخرى للمبالغة في تقدير التنظيم المنطقي للرياضيات. فقد اعتقد علماء الرياضيات منذ عهد بعيد أن الحدس يتفوق على المنطق، كما تتفوق أشعة الشمس على ضوء القمر. فقد آمن أفلاطون أن الحقائق الرياضية موجودة في العالم خارج ذات الإنسان، وأن العقل يدرك هذه الحقائق عبر التأمل والتفكير. كما أكد ديكارت أن «المنطق يستخدم فقط كي نتواصل فيما نعرفه». ويقول عالم الرياضيات هنري ليبيسج (Henry Lebesgue) «يمكننا المنطق من رفض مجادلات/براهين arguments معينة، ولكنه لا يجعلنا نصدق أي برهان». ويؤكد Jacques Hadamard أن المنطق يؤيد أو يؤكد نتائج الحدس فقط لا غير. ويتهكم بيسكوفيتش A. S. Besicovitch بتعليق طريف قائلاً أن عالم الرياضيات العظيم يعرف بعدد البراهين الخاطئة التي نشرها. لم يكن بسكوفيتش بحاجة الى الإشارة الى أن النظريات التي خمن هؤلاء العلماء أنها صحيحة لم تكن كذلك، رغم أنه تم إثباتها عن طريق المنطق. يعلم الرياضيون العظام بصحة نظرياتهم قبل البدء بالبرهان المنطقي لها، ويبدون راضين عن ذلك وهم لا يملكون إلا تلميحات للبرهان، بالرغم من أن فيرمات Fermat (وعمله الكلاسيكي الواسع في نظرية الاعداد) ونيوتن Newton (وعمله على المنحنيات من الدرجة الثالثة) لم يمتلكا حتى التلميحات. ولقد تطورت الرياضيات على أيدي علماء يتميزون بقوة الحدس لديهم أكثر من القدرة على إنجاز براهين صعبة وصارمة.

> يجب تقديم الرياضيات بطريقة استنتاجية كي نتمكن من إنجاز تنظيم مترابط من جهة، وفحص خطوات البرهان من جهة أخرى، مع ذلك تبقى قيمة الترتيب المنطقي متواضعة أكثر مما يمكن تصديقه

حديثاً، أصبحنا ندرك محدودية المنطق. إحدى النتائج الهامة للرياضيات الحديثة (نظرية جودل Godel) هي أنه لا يمكن للرياضيات أن تظل مكبلة بالمنطق. وهذا ما جعل هيرمان ويل Herman Weyle يعلق في نعيه لـ دافيد هيلبرت David Hillbert «تصبح الرياضيات فعلاً إبداعياً، مثلها مثل اللغة والموسيقى، للإنسان الذي تتحدى قراراته [وطريقة تفكيره وأصالتها] العقلنة الموضوعية الكاملة».

يميل معظم الناس الى القناعة بأن الفعل الإبداعي جزء أساسي وهام في الرياضيات، ومع ذلك يبقون على عكس قناعتهم هذه، لأنهم لا يملكون الخبرة الكافية في فعل الخلق أو الإبداع. وهم عادة ما يسألون «ماذا يمكن للإنسان أن يخلق/يبدع؟ ما هي المسائل التي بقيت دون حل [لم تحل بعد]؟ قدم هالموس Halmos في مقالته عدة أمثلة، ليس فقط على الإبداعات الفردية، بل على مجموعات من التصورات التي توفر مجالاً واسعاً من الاحتمالات.

وبسبب حيوية العملية الإبداعية وخداعها، بحث الكثيرون كي يفهموا آليات عملها. ورغم أنه قد ثبت أن معرفة ما ينتجه الإبداع في

الرياضيات، أسهل من الغوص في العمليات العقلية ومعرفة كيف تتم عملية الإبداع، فقد تم تحقيق بعض الفهم في ذلك. وأحد هذه المحاولات هي مقالة بوينكير Poincare، الذي كان هو ودافيد هيلبرت أعظم علماء الرياضيات في الأوقات الحديثة.

كذلك تجاهل العرض المنطقي للرياضيات (وهذا كل ما قدمه كتاب الأصول لإقليدس) عنصراً هاماً وهو الغرض من الرياضيات، الأمر الذي يعتبره بعض علماء الرياضيات بدعة لا فائدة منها. ويجادل هؤلاء العلماء بأن الرياضيات فن، وأن سؤالاً كهذا [الغرض من الرياضيات] ينتهك هذا الفن ويهينه. وهذا التوجه هو الشائع في الوقت الحاضر، وتدافع الرياضيات عن أهميتها بأن المؤلف يخلق جمالاً فحسب، عند الاجابة أو التعليق على الغرض منها. ويرى هؤلاء بأن أي تطبيق للرياضيات في الواقع هو غش أو إفساد.

حتى قبل مائة عام، لم يكن أي عالم يتردد في القول أن الغرض الأساسي للرياضيات هو فهم الظواهر الطبيعية والتحكم بها. فمثلاً كان شعار جاوس Gauss «أنت، والطبيعة، وفن الإله. امتلاك القوانين [قوانين الطبيعة] هو حدود عملي». ومع ذلك فإن وجهات النظر المتباعدة حول الغرض من الرياضيات احتدت وانفجر الجدل على الملأ من خلال رسالة كارل جاكوبي Carl Jacobi الى أدرين – ماري ليجندر Adrien-Marie Legendre عام 1830. وقد كتب فورييه Fourier في عمله «النظرية التحليلية للحرارة» «إن الدراسة المتعمقة جداً للطبيعة هي المصدر الخصب للاكتشافات الرياضية. إذ لا توفر هذه الدراسة فرصة لتحديد هدف الرياضيات فقط، بل فرصة لاستثناء الأسئلة الغامضة والحسابات غير المهمة. إنها [أي الدراسة] وسائل بناء تحليلية، واكتشاف الأفكار الأكثر أهمية التي يجب على العلم أن يحافظ عليها. إن الأفكار الأساسية هي التي تمثل الأحداث الطبيعية». وعلى هذه أجاب جاكوبي «صحيح أن فورييه يعتقد بأن الهدف الأساسي للرياضيات هي المنفعة العامة وتفسير الظواهر الطبيعية، ولكن عالم مثله يجب أن يعلم أن الهدف الفريد للعلم هو رفعة الروح الإنسانية، وعليه فإن مسألة من نظرية الأعداد لها قيمة كما للسؤال عن نظام الكواكب.

لا شك أن علماء الرياضيات يستقون المتعة من عملهم في الرياضيات كما يوفرها أي فعل إبداعي آخر. ولكن علماء الرياضيات العظام كانوا يتقبلون جمال الرياضيات على أنه مكسب إضافي. إذ أن السبب الرئيسي لعملهم كان المساعدة في فهم الانسان للكون ودوره [أي الانسان] فيه [أي الكون]، وتسخير قوى الطبيعة وظواهرها في خدمة الانسان. فليس من قبيل الصدفة أن العلماء الذين قدموا الكثير للرياضيات (أمثال: أرخميدس، نيوتن، لاجرانج، لابلاس، جاوس، هاميلتون، بوينكير، وحتى جاكوبي نفسه) كانوا في الأصل علماء فيزياء، أو على الأقل احتلوا مناصب مميزة في تاريخ العلم. إن أهمية الرياضيات وهدفها لا يقعان في سَلسَلة [أي جعلها متسلسلة] مجموعات من الرموز منطقياً، ولكن فيما تقدمه لنا هذه المجموعات من فهم للعالم من حولنا.

لم يكن خلق الرياضيات هو السبب الوحيد، بل استنتاج/اشتقاق المفاهيم والمشكلات من الرغبة في فهم الطبيعة والتحكم بها. لقد قدم العلم الدعم والحياة للرياضيات. ذكر تيليراند Tellyrand أن المثالي لا يبقى مثالياً لفترة طويلة إلا إذا كان واقعياً، وكذلك الواقعي لا يدوم إلا إذا كان مثالياً. وهذا يعني في الرياضيات أن هناك حاجة لجعل المشكلات الحقيقية مثالية وأن تتم دراستها بشكل مجرد، ويعني كذلك أن المثالي الذي يتجاهل الواقع لن ينجح. ولقد أكد ذلك أكثر علماء الرياضيات تميزاً في وقتنا الحاضر. في مقالة له بعنوان «الرياضي» [عالم الرياضيات]، يقول جون فان نيومان John von Neumann «كلما ابتعدت دراسة الرياضيات عن مصدرها التجريبي، أو اقتصرت على الأفكار الواقعية، كان هناك خطر جدي، إذ تصبح الرياضيات جمالية فقط، وتصبح فن من أجل الفن. وهذا ليس سيئاً إذا كان مجال العمل محاطاً بمواضيع مترابطة وقريبة من التجريب، أو إذا كانت الدراسة تتم على أيدي أشخاص مميزين. ولكن هناك خطر جدي أن يتطور الموضوع بعيداً عن مصدره، مما يؤدي الى تقسيمه الى فروع عدة متناثرة، وتصبح الدراسة [دراسة الرياضيات] غير منظمة ومليئة بالصعوبات. بكلمات أخرى تصبح الرياضيات في خطر كلما ابتعدت عن مصدرها التجريبي أو إذا اقتصرت على التجريد».

ولهذا السبب شدّد كورانت Courant (بالرغم من اشارته الى الدور الحيوي الذي يلعبه التجريد والتعميم في الرياضيات الحديثة) – شدّد على أن «الرياضيات يجب أن تستقي حيويتها من الواقع. وأن التحليق في التجريد يجب أن يكون أكثر من مجرد الفرار أو الخلاص؛ إذ يجب أن ينطلق من الأرض الى الفضاء ويعود اليها ثانية، وكلا الأمرين [الانطلاق والعودة] لازمان ولا مفر منهما، حتى لو لم يتمكن الطيار من إنجاز كل مراحل الرحلة».

ترجمة: جهاد شويخ

مركز إبداع المعلم