تعميم نظرية فيثاغوروس

مصطفى اسحق قنيص

نظرية فيثاغوروس نظرية قديمة ومشهورة تتعلق بالمثلث القائم الزاوية. ومعناها الهندسي: مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين في المثلث القائم الزاوية. ومعناها المجرد أن الأعداد: ل، ع، هـ التي تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية تحقق: ل^2 + ع^2 = هـ^2 ، حيث هـ يمثل طول الوتر. وهذه الأعداد تسمى أعداداً فيثاغورية. فمثلاً الأعداد: 5، 12، 13 تسمى أعداداً فيثاغورية لأنها تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية، وتحقق: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

يمكن تعميم نظرية فيثاغوروس ليصبح معناها الهندسي: مساحة المضلع المنتظم المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي نفس المضلع المنشأين على الضلعين الآخرين في المثلث القائم الزاوية. والجدول التالي يوضح ذلك (اعتماداً على المثلث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه: 3، 4، 5 وحدات):

المضلع المنتظم	المساحة على الضلع 3	المساحة على الضلع 4	المساحة على الوتر 5
مثلث متساوي الأضلاع	3.8971	6.9282	10.8253
مربع	9.00	16.00	25.00
مخمس متساوي الأضلاع	4843.15	5277.27	43.0120
مسدس متساوي الأضلاع	23.3827	41.5693	64.9520
مسبع متساوي الأضلاع	32.7053	58.1427	90.8479

وهكذا لأي مضلع منتظم مهما كان عدد أضلاعه.

القيم في الجدول السابق مأخوذة على المثلث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه: 3، 4، 5 وحدات، وهذا ينطبق أيضاً على أي مثلث قائم الزاوية.

يمكن التحقق من ذلك بتجريب مضلعات منتظمة ذات أي عدد من الأضلاع، والاستفادة من الطريقة التالية لحساب مساحة تلك المضلعات:

المضلع المنتظم الذي طول ضلعه = ل، وعدد أضلاعه = ن:

س = ((ن - 2) x 180) ÷ (2 x ن)

ص = س x 0.0174533

ر = (ل ÷ 2) x ظل (ص)

المساحة = 0.5 x ن x ل x ر

وكذلك يمكن حساب مساحة المضلعات حسب القانون التالي، ويفضل استعماله في المضلعات كثيرة الأضلاع (أكثر من 50 ضلعاً):

المساحة =(ن ل2)/(4 ظا(180/ن))

فمثلاً لو رسمنا على أضلاع المثلث القائم الزاوية (الذي أطوال أضلاعه: 3، 4، 5 وحدات) مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل منها يساوي 15 ضلعاً، فإننا نحصل على النتائج التالية:

مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله 3 وحدات = 158.7817217245 وحدة مربعة.

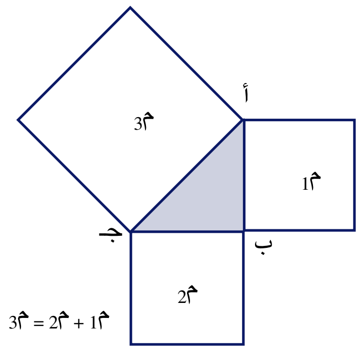
مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله 4 وحدات = 282.2786163992 وحدة مربعة.

مساحة المضلع المرسوم على الوتر الذي طوله 5 وحدات = 441.0603381237 وحدة مربعة.

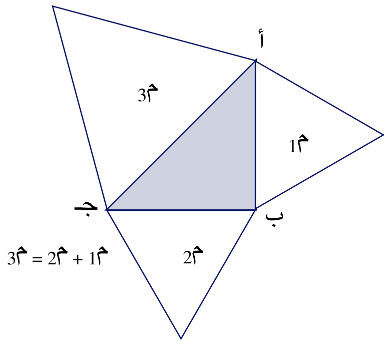
وهي تحقق: 158.7817217245 + 282.2786163992 = 441.0603381237.

وكذلك لو رسمنا على أضلاع المثلث القائم الزاوية (الذي أطوال أضلاعه: 3، 4، 5 وحدات) مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل

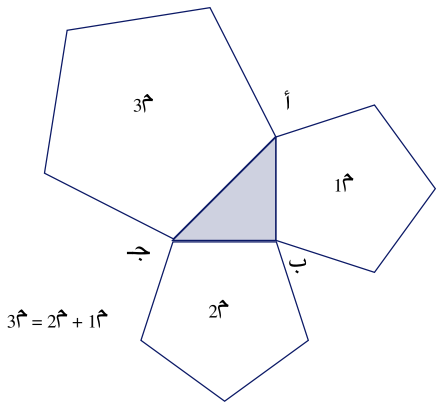
منها يساوي 57 ضلعاً، فإننا نحصل على النتائج التالية:
مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله 3 وحدات = 7866.39576445 وحدة مربعة.
مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله 4 وحدات = 13984.70358124 وحدة مربعة.
مساحة المضلع المرسوم على الوتر الذي طوله 5 وحدات = 21851.09934569 وحدة مربعة.
وهي تحقق: 7866.39576445 + 13984.70358124 = 21851.09934569



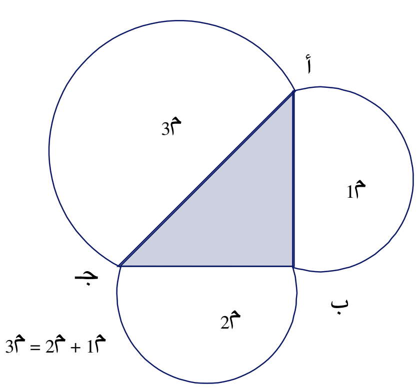
هذا التعميم لنظرية فيثاغورس لا ينطبق على المضلعات المنتظمة فقط، بل أيضاً على الدائرة: عند رسم أنصاف دوائر أقطارها أضلاع المثلث القائم الزاوية، فإن مجموع مساحتي نصفي الدائرتين المرسومتين على الضلعين يساوي مساحة نصف الدائرة المرسومة على الوتر. فمثلاً عند رسم أنصاف دوائر على أضلاع المثلث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه: 5، 12، 13 وحدة، نحصل على النتائج التالية:
مساحة نصف الدائرة المرسومة على الضلع الذي طوله 5 وحدات = 9.8175 وحدة مربعة.
مساحة نصف الدائرة المرسومة على الضلع الذي طوله 12 وحدة = 56.5486 وحدة مربعة.
مساحة نصف الدائرة المرسومة على الضلع الذي طوله 13 وحدة = 66.3661 وحدة مربعة.
وهي تحقق: 9.8175 + 56.5486 = 66.3661.

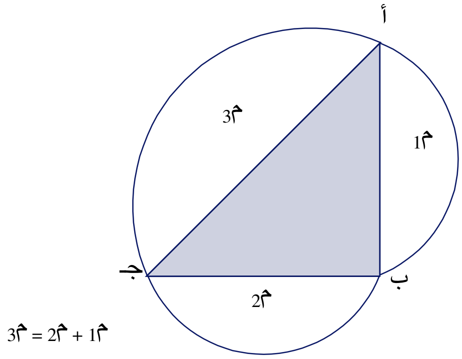


ومن البديهي أنه عند ضرب هذه المعادلة في 2 تبقى صحيحة، وبذلك يصبح التعميم: عند رسم دوائر (أو أنصاف دوائر) أقطارها أضلاع المثلث القائم الزاوية، فإن مجموع مساحتي الدائرتين المرسومتين على الضلعين يساوي مساحة الدائرة المرسومة على الوتر.
ويبقى هذا التعميم صحيحاً عند رسم نصف قطع ناقص محوره الأكبر (أو الأصغر) على أضلاع المثلث القائم الزاوية بشرط أن يكون لها الاختلاف المركزي نفسه، فإن مجموع مساحتي نصف القطع الناقص المرسومين على الضلعين يساوي مساحة نصف القطع الناقص المرسوم على الوتر.



وبذلك يصبح التعميم النهائي لنظرية فيثاغورس:
مساحة الشكل المنتظم المرسوم على الوتر تساوي مجموع مساحتي نفس الشكل المرسوم على الضلعين الآخرين في المثلث القائم الزاوية.





البرهان في حالة المضلعات:

لنأخذ المثلث القائم الزاوية الذي أطوال أضلاعه ل، ع، هـ (هـ يمثل طول الوتر).

ولنرسم على أضلاعه مضلعات منتظمة عدد أضلاع كل منها = ن ضلعاً وأطوال أضلاعها = ل، ع، هـ على الترتيب.

م1: مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله = ل:

س = ((ن - 2) x 180) ÷ (2 x ن)

ص = س x 0.0174533

ر1 = (ل ÷ 2) x ظل ص

م1 = 0.5 x ن x ل x ر1

م1 = 0.5 x ن x ل x (ل ÷ 2) x ظل ص

م2: مساحة المضلع المرسوم على الضلع الذي طوله = ع:

س = ((ن x 2) x 180) ÷ (2 x ن)

ص = س x 0.0174533

ر2 = (ع ÷ 2) x ظل ص

م2 = 0.5 x ن x ع x ر2

م2 = 0.5 x ن x ع x (ع ÷ 2) x ظل ص

وبالطريقة نفسها تكون مساحة المضلع المرسوم على الوتر الذي طوله = هـ:

م3 = 0.5 x ن x هـ x (هـ ÷ 2) x ظل ص

ونتحقق من أن: م1 + م2 = م3 :

بقسمة قيمة م1، م2، م3 على 0.5 x ن x ظل ص نحصل على:

ل x (ل ÷ 2) + ع x (ع ÷ 2) =؟ هـ x (هـ ÷ 2)

بضرب هذه المعادلة في 2، نحصل على:

ل2 + ع2 = هـ2 وهذا صحيح حسب الفرض.

البرهان في حالة الدائرة:

نصف الدائرة المرسومة على الضلع الذي طوله = ل مساحتها = 0.125 x ط x ل2 وحدة مربعة.

نصف الدائرة المرسومة على الضلع الذي طوله = ع مساحتها = 0.125 x ط x ع2 وحدة مربعة.

نصف الدائرة المرسومة على الوتر الذي طوله = هـ مساحتها = 0.125 x ط x هـ2 وحدة مربعة.

0.125 x ط x ل2 + 0.125 x ط x ع2 =؟ 0.125 x ط x هـ2

(ط : هي النسبة التقريبية)

بالقسمة على 0.125 x ط نحصل على:

ل2 + ع2 = هـ2 وهذا صحيح حسب الفرض.

وكذلك يمكن البرهان بالنسبة للقطع الناقص.

أخيراً، إن من حسن حظ فيثاغوروس أن هذه النظرية نسبت إليه وحملت اسمه، فهي كانت معروفة عند البابليين منذ 2000 سنة قبل زمن فيثاغوروس!

ترد نظرية فيثاغوروس في معظم كتب الرياضيات المنهجية على مستوى العالم، وتبقى في معظمها محصورة في تقديم المفهوم على حال ما اكتشفه فيثاغوروس من أن مساحة المربع المنشأ على وتر مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مساحة المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين للمثلث، وعلى حدود علمي لم أجد تعميماً للنظرية يتجاوز حالة المربع كأن يكون الشكل المنشأ مضلعاً أو دائرة مثلاً.

وفي هذه الورقة أقدم بعض التعميمات لنظرية فيثاغوروس التي قد تكون مفيدة للمعلم والطالب في كسر هذا النمط المألوف من تقديم النظريات والمفاهيم وأيضاً المساهمة في توسيع الفضاء المعرفي للطالب والمعلم في بعض المواضيع الرياضية ونقدم نظرية فيثاغوروس مثالاً.

مصطفى إسحق قنيس- معلم في مدرسة ذكور بيت لحم الثانوية